Exercice : 1

Etudier la convergence des intégrales suivantes:

a) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{7x+1}{x^4+7x^3}dx$ b) Convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$

c) $\displaystyle\int_{1}^{5} \frac{1}{\ln x}dx$ d) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx$ e) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{x^2}dx$

Exercice 2

La durée de vie d'un atome d'un élément radioactif est une variable aléatoire continue X qui admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \text{si} \quad x < 0 \quad f(x) = 0 \\ \text{si} \quad x \geqslant 0 \quad f(x) = \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x} \qquad \text{où} \quad \lambda > 0 \end{cases}$$

1. Vérifiez qu'il s'agit bien d'une densité de probabilité, puis calculez l'espérance mathématique de X.
2. On prend t en secondes et $\lambda = 0{,}2$. Quelle est la probabilité pour qu'un atome ait une durée de vie supérieure à 4 secondes ? une durée de vie comprise entre 1 et 3 secondes ?

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{K}{1+x^2}$.

1. Comment faut-il choisir la constante K pour que f soit une densité de probabilité ?
2. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité de probabilité.
Étudiez l'existence, et la valeur éventuelle, de l'espérance mathématique et de la variance de X.